

ブシネスク方程式のソリトン解について

見上敏文*・岩瀬浩之**・後藤智明***・藤間功司****

1. 緒 言

水面波の非線形性および分散性を考慮した波浪の伝播・変形を解析する目的で非線形分散長波式が使われるようになってきた。これらの非線形分散長波式は, KdV 式と異なり任意海底形状の 2 次元平面解析を対象としたもので, Mei-LêMêhaute の式 (1966) や Peregrine の式 (1967) を基礎としたものである。近年になり, 後藤 (1984) が分散項に有限振幅性を考慮した式を, Cruz ら (1997), Madsen-Sørensen (1992), Nwogu (1993) および Beji-Nadaoka (1996) が線形分散特性を改善した式を提案しており, 浅海波浪変形などを対象にこれら修正式を利用した数値解析が多数実施されている。

本研究では, 津波の伝播・変形現象に適した非線形分散長波式を選定することを目的として, 現在まで種々の解析に利用されている非線形分散長波式について比較検討を行う。津波の伝播・変形において特徴的なことは, 深海域で波数分散現象が起こること, そして浅海域の最終的な変形過程において津波がソリトン分裂を起こしたり波状段波となることである。したがって, 線形分散以外に非線形性と分散性の相互作用まで踏み込んだ考察が必要である。そこでまず非線形性が無視可能な深海域における津波の波数分散現象に関して, 日本海中部地震津波を事例として複素フーリエ解析法を利用して比較検討する。次に第 1 次近似であるが水平床の各非線形分散長波式の孤立波に関する解を導き, その波速や波形の急峻度から各非線形分散長波式の非線形項と分散項の特性を考察する。

なお, 弱非線形性そして弱分散性を仮定した非線形分散長波式は波高水深比および相対水深がともに小さいとした摂動展開により導かれる。本研究で比較検討対象とした 8 種類の式群は, すべてこの摂動展開の第 2 次近似の範囲で同一精度と考えられるものである。しかしながら分散項と非線形項の大きさが拮抗してくるソリトン分裂現象では, 分散項の形の違いにより波高や波形の急峻

度が多少異なったものとなる。したがって津波解析に適切な非線形分散長波式を採用しなければ, 流体力や陸上遡上高といった被災のメカニズムに関する評価を正確に行うことができない。

2. 非線形分散長波式と線形分散特性

(1) 非線形分散長波式

代表的な非線形分散長波式としては, 断面平均流速で記述する Peregrine 式, Beji-Nadaoka 式, Cruz 式や, 水深方向に積分し, 流量フラックス (単位幅流量) で記述する Madsen-Sørensen 式がある。これ以外にも, 底部流速や任意水深流速で表した Mei-LêMêhaute 式や Nwogu 式があるが, これらの式は陸上遡上や防波堤からの越流などが重要となる津波の解析には不向きである。

本研究において検討の対象とした式は断面平均流速あるいは流量フラックス表示である Peregrine 式, Beji-Nadaoka 式, Cruz 式, および Madsen-Sørensen 式とその類似式である。水平床を仮定して, 具体的に式形を示すと下記ようになる。すなわち, 断面平均表示としては連続式が,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = 0 \dots\dots\dots (1)$$

運動式が,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^2}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \dots\dots\dots (4)$$

の 3 種類の非線形分散長波式である。断面積分表示としては, 連続式が,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

運動式が,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 株式会社アルファ水工コンサルタンツ 技術部
 ** 正会員 東海大学技術職員 工学部土木工学科
 *** 正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科
 **** 正会員 工博 防衛大学校助教授 土木工学教室

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^3}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} \right] \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{gh^3}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^3}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \dots\dots\dots (10)$$

の5種類の非線形分散長波式である。ここに、 u は断面平均流速、 Q は流量フラックス(= $u(h+\eta)$)、 η は水位、 h は静水深、 D は全水深(= $h+\eta$)、 g は重力加速度である。なお、式(2)が本来のPeregrine式、式(4)がBeji-Nadaoka式とCruz式(水平床近似では同一となる)、式(10)がMadsen-Sørensen式に該当する。また、式(6)は、岩瀬ら(1998)が津波解析に利用しているものであり、水深方向に積分したPeregrine式と名付けてもよい式である。さらに、式(8)は、有限振幅性を考慮した分散項であり、後藤が誘導したアーセル数が大きい場合の非線形分散長波式の簡略式である。

(2) 線形分散特性

検討対象とした連続式および8種類の運動式の非線形項を無視し、波数分散性を考慮した波速 c を用いて、波高を H 、波数を k として x の正の方向へ伝播する波を $\eta = H \sin k(x-ct)$ とおくと、 $\partial/\partial t = -c\partial/\partial x$ 、そして連続式から $Q = hu = c\eta$ であるので、比較的簡単に、各式の分散関係が求まり、式(2)、(6)、(7)、(8)に関して、

$$c/c_0 = \sqrt{1/(1+\sigma_0/3)} \dots\dots\dots (11)$$

式(3)、(9)に関して、

$$c/c_0 = \sqrt{1-\sigma_0/3} \dots\dots\dots (12)$$

そして、式(4)および(10)に関して

$$c/c_0 = \sqrt{(1+\sigma_0/15)/(1+2\sigma_0/5)} \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここに、 $c_0(=\sqrt{gh})$ は線形長波の波速であり、また $\sigma_0=(kh)^2$ である。

各式の波数分散特性の違いを図-1に示す。図には、KdV式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

の分散関係式

$$c/c_0 = 1 - \sigma_0/6 \dots\dots\dots (15)$$

および線形表面波(Exact linear)の分散関係式

$$c/c_0 = \sqrt{\sigma_0^{-1/2} \tanh \sigma_0^{1/2}} \dots\dots\dots (16)$$

も示している。式(2)、(6)、(7)、(8)の分散関係は、 $kh=0.7$ 程度まで線形表面波と一致する。また、 $kh=0.7$

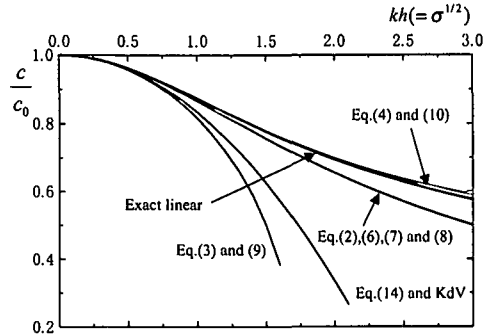


図-1 線形分散関係

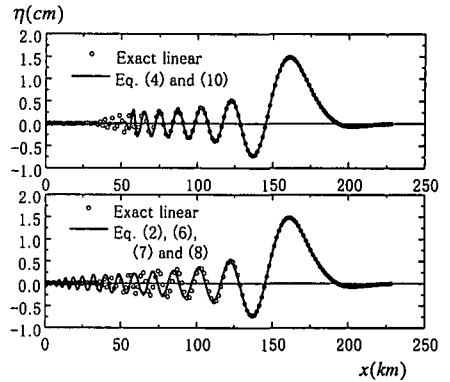


図-2 深海域における津波の伝播特性

以上に大きくなると波速が遅くなり、分散項が相対的に大きく評価されていることになる。式(3)、(9)は、 $kh=0.5$ 以上で分散効果が過大となる。一方、線形分散に適合するように改善された式(4)、(10)は、 $kh=2.0$ 程度まで良好な分散関係がみられる。

図-2は、深海域の津波の伝播に関して式(2)、(6)、(7)、(8)と式(4)、(10)の比較を行ったものである。初期波形は相田(1984)により推定された日本海中部地震津波に関する指向方向の断面波形であり、各非線形分散長波式について一定水深(水深3,000m)を15分間、約150km伝播させた場合の空間波形の比較である。この波形 η は、高速フーリエ変換により初期波形を複素フーリエ振幅 C_n と位相 θ_n に分解し、

$$\eta = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} C_n [e^{ik_n(x-C_n t)} + e^{ik_n(x+C_n t)}] \dots\dots\dots (17)$$

と計算している。ここに、 n はフーリエモードであり、 k_n はフーリエモードに対応する波数、そして c_n は各式のフーリエモードに対応する波速である。図から判断できるように、両者は比較的良好に微小振幅表面波から算出した主峰と分散波列を近似している。特に、式(4)、(10)を利用した計算値の精度が良い。ただし、式(13)から明らかのように kh すなわち σ_0 が大きくなると線形表面波

の分散関係から徐々に離れ、 $c/c_0 = \sqrt{1/6} = 0.408$ に漸近するという特性がある。通常の波浪のような水深が比較的浅く連続的な波を解析する場合には、このことをさほど重要視する必要がないと思われるが、深海域の津波のような一山一谷の波の伝播現象を取り扱う際には、ある程度以上の高波数成分がほぼ同一の伝播速度で進むため、図-2 上の $x=60$ km 付近で見られるような分散波列の終端部にエネルギーの一部が集積する。浅海域においては非線形性によりさらに高周波成分が生成されるため、場合によっては、このことが大きな問題となる可能性がある。したがって、津波の解析に式(4)、(10)をそのまま利用することには多少の危惧があり、場合によっては高波数成分を適切に減衰させることができる人為的粘性項などを考慮する必要があると思われる。

3. 孤立波の第1次近似解

(1) 解法

Peregrine 式など断面平均流速で記述されている非線形分散長波式は、全水深 D をかけると下記のように流量フラックス表示の式へ書き換えることができる。

$$D \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (18)$$

したがって、式(2)、(3)、(4)は、それぞれ、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = D \left[\frac{h^3}{3} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^3} \left(\frac{Q}{D} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = D \left[\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = D \left[\frac{2h^3}{5} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^3} \left(\frac{Q}{D} \right) + \frac{gh^2}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] \quad \dots\dots\dots (21)$$

と変形できる。以上のことから、検討対象とする8種類の運動式の局所項、移流項(非線形項)、静水圧力項は同一形となり、違いは分散項に限定される。本研究においてはこの断面積分形の式を利用した解析を行う。

いま、一例として最も簡単と思われる連続式(5)と運動式(6)からなる非線形分散長波式に関する孤立波の第1次近似解を導く。孤立波の波形として、

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 k(x-ct) \quad \dots\dots\dots (22)$$

を仮定すると、線形分散関係式の導出の場合と同様に $\partial/\partial t = -c\partial/\partial x$ と連続式から $Q = c\eta$ が成り立つことがわかる。したがって、 $\epsilon = \eta/h$ 、 $\epsilon_0 = H/h$ 、 $\sigma_0 = (kh)^2$ とおくと、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = c_0^2 (1-\epsilon) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) = c^2 [2\epsilon + O(\epsilon_0^2)] \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$h^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^3} = -c^2 \sigma_0 \left(4 - 12 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。したがって、非線形分散長波式(6)は、

$$\left[-c^2 + c_0^2(1+\epsilon) + c^2(2\epsilon) + c^2 \frac{\sigma_0}{3} \left(4 - 12 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + O(\epsilon_0^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

と変形できる。定常的な孤立波の解が存在するためには、 $O(\epsilon_0)$ の範囲で、

$$-1 + (c_0/c)^2(1-\epsilon) + c^2(2\epsilon) + (\sigma_0/3)(4 - 12\epsilon/\epsilon_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

すなわち、

$$-1 + (c_0/c)^2 + 4\sigma_0/3 = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

および、

$$(c_0/c)^2 + 2 - 4\sigma_0/\epsilon_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

が恒等的に成立する必要がある。故に、

$$c/c_0 = 1/\sqrt{1-4\sigma_0/3} \quad \dots\dots\dots (31)$$

および、

$$\sigma_0 = (3\epsilon_0/4)(1+\epsilon_0/3)^{-1} \quad \dots\dots\dots (32)$$

であり、波高水深比 ϵ_0 が与えられれば、対応する孤立波の波形が定まったことになる。なお、式(19)、(21)は、分散項の取り扱いが多少複雑となるが、

$$h^2 \frac{\partial^3 (Q^2/D)}{\partial t \partial x^3} = -c^2 \left[h^2(1+\epsilon) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] + O(\epsilon_0^2) \quad (33)$$

であることに留意すると上述の方法で孤立波の第1次近似解を求めることができる。

(2) 孤立波の解の比較

運動式(6)以外の7種類の運動式に関して、上述と同様な解析により $O(\epsilon_0)$ の範囲でそれぞれの孤立波の第1次近似解を導き、相対水深と波速比の違いとして整理したものが表-1である。仮定した孤立波の解は、

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 k(x-ct) = H \operatorname{sech}^2 (\sigma_0^{1/2} h^{-1})(x-ct) \quad \dots\dots\dots (34)$$

であるので、 σ_0 が小さいほど幅広の孤立波形であり、大きいほど急峻な孤立波形であることを意味する。したがって、KdV 式に比べ、式(6)、(7)、(8)、(10)の孤立波の解が幅広であり、式(2)、(4)、(9)が急峻となる。特に、断面平均表示の式(2)を利用した数値解析において波高が過大になりすぎることが長尾ら(1985)、岩瀬らにより指摘されており、このことは導出した孤立波

表-1 孤立波解の比較

Equation	Dispersive Term	Relative depth	Celerity
Kdv	$\frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4}$	$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{2\sigma_0}{3}$
Eq.(6)	$\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1-4/3\sigma_0}}$
Eq.(7)	$\frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{5\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1-4/3\sigma_0}}$
Eq.(8)	$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^3}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} (1+2\epsilon_0)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1-4/3\sigma_0}}$
Eq.(2)	$D \left[\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{Q}{D} \right) \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1-4/3\sigma_0}}$
Eq.(9)	$\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 - \frac{2\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{3\sigma_0}{4}$
Eq.(3)	$D \left[\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4}$	$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{3\sigma_0}{4}$
Eq.(10)	$\frac{2h^2}{5} \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^2}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{8\epsilon_0}{15}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{1-4\sigma_0/15}}{\sqrt{1-8\sigma_0/5}}$
Eq.(4)	$D \left[\frac{2h^2}{5} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{Q}{D} \right) + \frac{gh^2}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 - \frac{2\epsilon_0}{5}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{1-4\sigma_0/15}}{\sqrt{1-8\sigma_0/5}}$

の解の形とも符合する。なお、孤立波の波形は分散項と非線形項の相対的な大きさを表していると考えられることができる。すなわち、非線形項は波形を前傾化する方向に作用し、分散項は幅広の方向になるように作用する。したがって、急峻な解は非線形項に比べ分散項が相対的に小さいことを意味し、逆に幅広の解は非線形項に比べ分散項が相対的に大きいことになる。

また、KdV 式の解には保存則が成立することが知られている。最低次の保存則は波形の面積が一定に保たれることを意味する。検討対象とした非線形分散長波式群は KdV 式と等価でないため、このような保存則が厳密に成立するかどうか分からないが、ここでは波形の面積が保存されると仮定して波形の急峻度を調べてみる。図-3 は、波高水深比 $\epsilon_0 = 0.5$ の KdV 式の孤立波解と等面積となる波形である。図から、そして解の面積が $S = 2Hh/\sigma_0^{1/2}$ と計算でき、波高が $H = S\sigma_0^{1/2}/2h$ で与えられることから判断できるように、相対水深 σ_0 が小さくなる運動式がより高いソリトン波高になることがわかる。また、Laitone (1960) の第 2 次近似ソリトン解が KdV 式の解に比べ幅広となること、そして KdV 式の解でも水理実験結果と相当良好な一致を示すことが Nagashima (1977) の研究により明らかにされていることなどを勘案すると、少なくとも KdV の解を大きく上まわる波形には問題があると判断できる。

図-4 に各式の波高水深比による波速比の違いを示す。この図から、やはり過度に急峻なソリトン波形となる非線形分散波式は、KdV 式の波速より大幅に過大となり、Nagashima の実験結果から得られる知見と大きく異なる。あくまでも孤立波の第 1 次近似解の特性という考

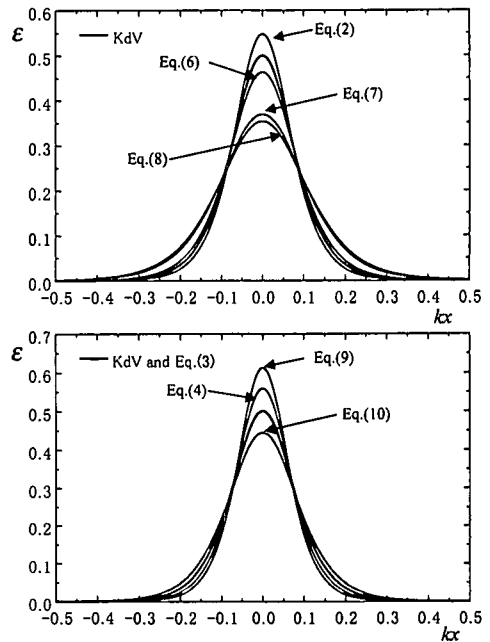


図-3 孤立波解の比較

察範囲であるが、津波の伝播・変形を取り扱うには、式 (6), (10) そして (3) が適切であると判断できる。さらに言うところ、線形分散特性が良く、また保存則形の式群となる式 (6) および (10) がより適していると考えられる。

4. 結 言

非線形分散長波式は、 $O(\epsilon_0) = O(\sigma_0) \ll 1$ 、すなわちアーセル数 $U_r = \epsilon_0/\sigma_0$ が $O(1)$ と仮定して摂動展開を利用し

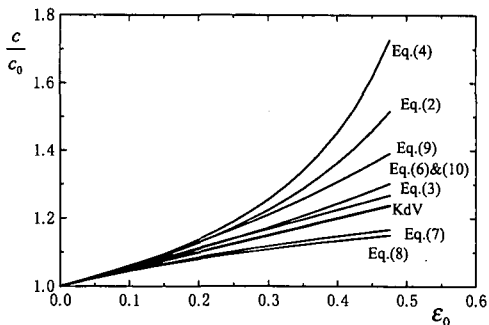


図-4 孤立波の波速に関する比較

て導かれる。摂動展開の2次近似では、検討対象とした8種類の運動式はすべて同じオーダーである。しかしながら、その孤立波の第1次近似解は大きく異なる。津波の伝播・変形を対象とする場合には、非線形性と分散性の相対的大きさを意味する孤立波の第1次近似解の急峻度が特に重要であり、検討結果から岩瀬らの式(断面積分形の Peregrine 式)あるいは Madsen-Sørensen 式が適切であるものと判断できる。

謝辞: 本研究をまとめるにあたり東海大学工学部土木工学科水工研究室の学部生および大学院生諸君の助力を得た。また、本研究は文部省科学研究費(基盤研究(B)(1)代表 入江功九州大学教授)と㈱大林組技術研究所からの研究助成を利用した。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

相田 勇 (1984): 1983年日本海中部地震津波の波源数値モデ

ル, 東京大学地震研究所彙報, 59号, pp. 93-104.
 岩瀬浩之・見上敏文・後藤智明 (1998): 非線形分散波理論を用いた実用的な津波計算モデル, 土木学会論文集, 第600号, pp. 119-124.
 Cruz, E. C., 石倉正英, 青野利夫 (1997): 非線形分散モデルを用いた開境界処理に関する研究, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 46-50.
 後藤智明 (1984): アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第351号, pp. 193-201.
 長尾昌朋, 後藤智明, 首藤伸夫 (1985): 非線形分散波の数値計算, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 114-118.
 Beji, S. and K. Nadaoka (1996): A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth, Ocean Eng., Vol.23, pp. 691-704.
 Korteweg, D. J. and G. DeVries (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Phil. S 5, Vol. 39, No. 240, pp. 422-443.
 Laitone, E. V. (1960): The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. F. M., Vol. 9, Part 3.
 Madsen, P. A. and O. R. Sørensen (1992): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, A slowly-varying bathymetry, Coastal Eng., Vol. 18, pp. 183-204.
 Mei, C. C. and B. LèMèhaute (1966): Note on a equations of long waves over an uneven bottom, J. Geophys. Res., Vol. 71, pp. 393-400.
 Nagashima, H. (1977): Deformation of nonlinear shallow water waves, Scientific Paper, Inst. of Physical and Chemical Res., Vol. 71, pp.13-44.
 Nwogu, O. (1993): An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
 Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. F. M., Vol. 27, Part 4, pp. 815-827.